Définition 13 (combinaison linéaire)**.**
Soient $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\vec{b}$ défini par

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$$

est appelé *combinaison linéaire* des $\vec{a}_i$ et les λ_i sont dits les *coefficients* de la combinaison linéaire.

Remarques

1) Certains des λ_i peuvent être nuls ou négatifs.

2) Les combinaisons linéaires donnent lieu à deux types de problèmes :
- soit on connaît les coefficients λ_i et les vecteurs $\vec{a}_i$ et on cherche à calculer les composantes de la combinaison linéaire $\vec{b}$;
- soit on connaît les vecteurs $\vec{a}_i$ et $\vec{b}$ et on cherche à déterminer les coefficients λ_i (s'il s existent !).

Liens systèmes - matrices - équations vectorielles

Exemple On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{b}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$?

$\Leftrightarrow$ Existe-t-il $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ avec

$$\boxed{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{b}} \quad ?$$

↳ "éq. vectorielle"

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a-t-il une solution ?

λ_i $(1 \leq i \leq 3)$ sont les inconnues

Suite de l'exemple

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = -1 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \end{cases}$$

L'éq. vectorielle est équivalente à un système lin.

Représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{alg. GJ}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\vec{a}_1$ etc. $\vec{b}$ 3 pivots

3 pivots $\Rightarrow$ une unique solution $S = \{(\underset{\lambda_1}{1}, \underset{\lambda_2}{2}, \underset{\lambda_3}{-1})\}$

Généralisation

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a}_1 \in \mathbb{R}^m & & \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array}$$

$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\Leftrightarrow x_1 \vec{a}_1 + \ldots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

Théorème 3. *Une équation vectorielle*

$$x_1 \vec{a_1} + \dots + x_n \vec{a_n} = \vec{b}$$

$\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m \quad 1 \leq i \leq n$
$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

a le même ensemble de solutions que le système linéaire correspondant à la matrice augmentée

$$\left(\vec{a_1} \ \dots \ \vec{a_n} \mid \vec{b} \right)$$

qu'on peut résoudre par l'algorithme de Gauss-Jordan.

Remarque
Si le système admet une solution, alors $\vec{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A.

Exemple On prend $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{b}$ soit comb. lin. de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ pour

1) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

et $S = \{(3,1)\} \Rightarrow \vec{b} = 3\vec{a_1} + \vec{a_2}$

2) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ d'où $S = \emptyset$

$\vec{b}$ n'est <u>pas</u> comb. lin. de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$

3) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

on a $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

var. libre

$\lambda_1 - 2\lambda_2 = -1$ $\quad$ λ_2 est libre
$\lambda_1 = 2\lambda_2 - 1$ $\quad$ λ_1 de base

$S = \{ (2t-1, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

ex: représenter graphiquement ces 3 situations

Ensembles engendrés par des vecteurs

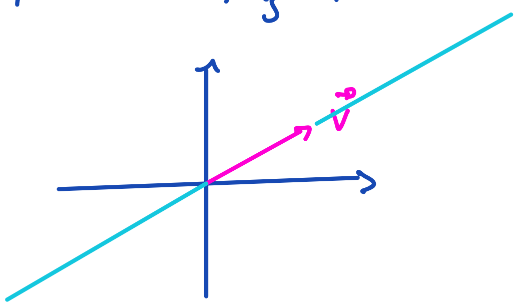
Ensemble engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les comb. lin. qu'on peut obtenir sont

$$\lambda \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ex $\quad \vec{v}, \quad \pi \cdot \vec{v}, \quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{1}{5}\vec{v}, \quad -\vec{v}$

Elles forment une droite vectorielle



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ " $\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$ "

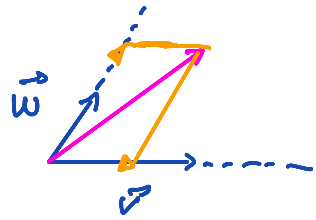
Ensemble engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

1) Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, les comb. lin. donnent une droite vectorielle de même direction que $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Sinon, l'ens. des comb. lin. de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donne $\mathbb{R}^2$ (voir plus loin !)



Définition 14 (span ou vect).
Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'*ensemble des combinaisons linéaires* de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ s'appelle le *span*. On le note

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \text{ ou } \operatorname{vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$$

Remarques

1) c'est $\{\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le p\}$

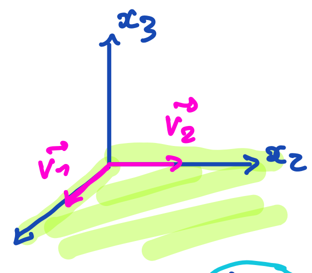
2) $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ "inclus ou égal"

3) $\vec{0} \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ car il suffit de prendre $\lambda_i = 0$

Exercice additionnel, voir Moodle.

Exemple 1 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

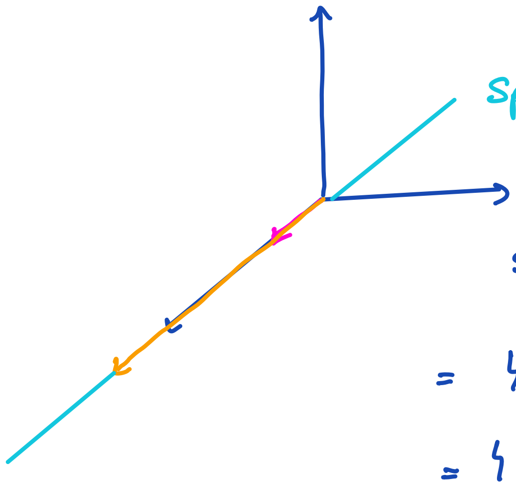
<u>esquisse:</u>



$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}}_{\neq \mathbb{R}^2} \subset \mathbb{R}^3$$

Exemple 2 $\quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$



$$\operatorname{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \overbrace{\vec{v_2}}^{4\cdot\vec{v_1}} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot 4 \vec{v_1} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\mu \vec{v_1} \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\vec{v_1}\}$$

1.5 Équation matricielle

But exprimer les combinaisons linéaires comme produit d'une matrice et d'un vecteur.

Définition 15 (Produit matrice-vecteur)**.**
Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On définit le *produit* $A\vec{x}$ par

$$A\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{m\times 1}$$

Exemples

1) $$A\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-2)5 \\ -1\cdot 4 + 3\cdot 5 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \text{impossible !}$$

Remarque

1) Le produit n'est pas toujours défini. Il faut que

$$\# \text{ colonnes de } A = \# \text{ lignes de } \vec{v}$$

La taille du produit est un vecteur ayant un nombre de lignes égal au nombre de lignes de A.

2) On généralisera la déf. au produit de deux matrices.

Lien entre produit matriciel et systèmes d'équations linéaires

Exemple Soit

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a}_1 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \; ; \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système comme

1) le système d'équations linéaires $\mathcal{S}$

2) la matrice augmentée $(A \mid \vec{b})$

3) une équation vectorielle $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$

où $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(vecteurs-colonnes de A)

4) une équation matricielle $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$

Toutes ces représentations ont le même ensemble de solutions. On utilisera principalement la notation 4). Pour la résolution, on aura recours à la représentation 2) et l'algorithme de Gauss-Jordan.

Définition 16 (équation matricielle)**.**
Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'équation

$A\vec{x} = \vec{b}$ est dite une éq. matricielle.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \forall\, 1 \le i \le m$$